

Exercices de calcul

Les questions notées (ME) sont au programme de l'option maths expertes.

I - Calculs

Q1. Calculer et mettre sous la forme la plus simple les fractions suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{1}{4} - \frac{1}{3} & \text{b) } \frac{5}{6} - \frac{1}{3} & \text{c) } \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) & \text{d) } \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}} \\ \text{e) } \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} & \text{f) } 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} & \text{g) } \frac{1}{4} - \frac{1}{-3} & \end{array}$$

Q2. Développer et ordonner les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } P_1(x) = (x^2 + 3x)^2 & \text{b) } P_2(x) = (x - 1) \times (x + 1) \\ \text{c) } P_3(x) = (x - 1) \times (x^2 + x + 1) & \text{d) } P_4(x) = (x - 1) \times (x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) \end{array}$$

Q3. Factoriser :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } P_1(x) = 4x^2 + 4x + 1 & \text{b) } P_2(x) = x^4 - 4x^2 + 4 \\ \text{c) } P_3(x) = (x^2 + 8x + 4)^2 - (x^2 + 4)^2 & \text{d) } P_4(x) = (x - 2)^4 + (x^2 - 4)^2 \end{array}$$

Q4. Développer les expressions suivantes :

$$\text{a) } (\sqrt{5} + 1)^2 \quad \text{b) } (\sqrt{5} - 1)^2 \quad \text{c) } (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$$

Q5. Écrire le plus simplement possible :

$$\text{a) } (3\sqrt{3})^4 \quad \text{b) } (\sqrt{2} + 3)^2 - (\sqrt{2} - 3)^2 \quad \text{c) } (\sqrt{2} - 3)^2 \times (\sqrt{2} + 3)^2$$

Q6. Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier :

$$\text{a) } f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{b) } f_2(x) = \frac{x^3 - x}{x + 1} \quad \text{c) } f_3(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}$$

Q7. Si $a > b$, comparer dans chaque cas les deux expressions :

$$\text{a) } \frac{1}{a} \text{ et } \frac{1}{b} \quad \text{b) } -a \text{ et } -b \quad \text{c) } -\frac{1}{a} \text{ et } -\frac{1}{b}$$

Q8. Simplifier le plus possible, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^2} & \text{b) } \left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{10} & \text{c) } \sqrt{7} \times 7^{3/2} & \text{d) } 81 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} \\ \text{e) } \frac{x^{2n}}{x^n} & \text{f) } \frac{x^{n^2}}{x^n} & \text{g) } (x^n)^3 \times (x^3)^n & \text{h) } \frac{5^n \times 12^{2n}}{10^n \times 6^{4n}} \end{array}$$

Q9. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } e^x \times e^{1-2x} & \text{b) } \frac{e^{2x+4}}{e^{x+1}} & \text{c) } \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \ln(\sqrt{ab}) \\ \text{d) } 4 \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 3 \ln(a) + 5 \ln(b) & \text{e) } e^{-2 \ln(3)} & \text{f) } \ln(\sqrt{e^{\ln(\sqrt{3})}}) \end{array}$$

II - Trigonométrie

Q10. Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants aux angles entre parenthèses exprimés en radian :

$$\text{a) } A(0) \quad \text{b) } B\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{c) } C\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{d) } D(\pi) \quad \text{e) } E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Q11. Donner la valeur du cosinus et du sinus pour les angles suivants :

$$\text{a) } 0 \text{ rad} \quad \text{b) } -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{c) } \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \text{d) } \pi \text{ rad} \quad \text{e) } \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Q12. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer les valeurs exactes des expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \text{b) } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & \text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \text{d) (ME) } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) & \text{e) (ME) } \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) & \text{f) (ME) } \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

Q13. (ME) Exprimer $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

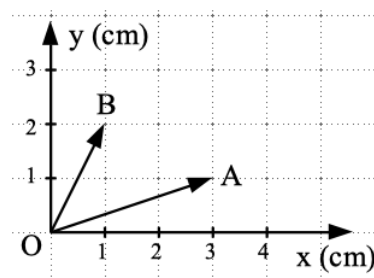
III - Géométrie

Q14. Quel est le périmètre d'un cercle de rayon $r = 2$ cm ?

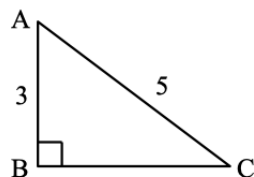
Q15. Quelle est la surface d'un disque de rayon $r = 2$ cm ?

Q16. Quelles sont la surface et le volume d'un cylindre de rayon $r = 2$ cm et de hauteur $h = 10$ cm ?

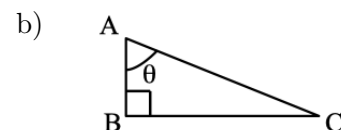
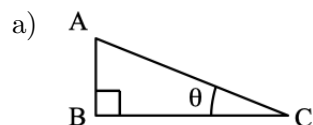
Q17. Quelle est la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$?



Q18. Déterminer la valeur du côté BC dans le triangle rectangle ABC suivant :



Q19. Exprimer, dans chaque cas, AB et BC en fonction de AC et θ .



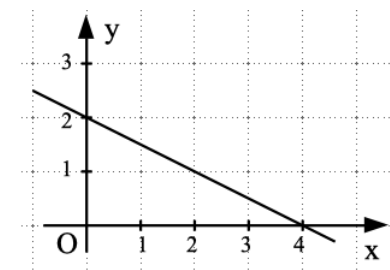
Q20. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs suivants, exprimés dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j})$: $\vec{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{OB} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Q21. Déterminer la norme des deux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ précédents.

Q22. Déterminer l'angle entre les deux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ précédents.

Q23. Quelle est la figure géométrique décrite dans le plan (O, x, y) par l'équation $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$?

Q24. Déterminer l'équation de la droite suivante :



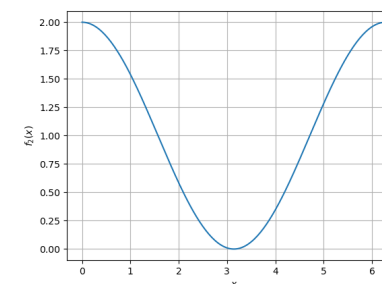
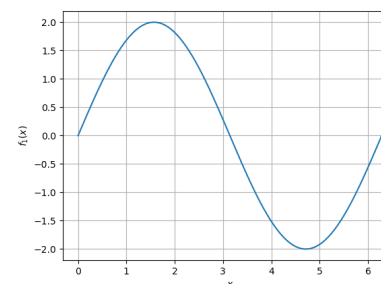
Q25. Tracer la droite d'équation $y = 2x - 3$.

IV - Graphes

Q26. Tracer l'allure des courbes suivantes sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

- a) $f_1(x) = \cos(x)$ b) $f_2(x) = \sin(x)$ c) $f_3(x) = 1 - \cos(x)$
 d) $f_4(x) = \sin^2(x)$ e) $f_5(x) = 2 + 3 \times \cos(x)$ f) $f_6(x) = \sin(2x)$

Q27. Déterminer, en utilisant les fonctions cos et sin, l'expression des fonctions correspondant aux courbes suivantes :



Q28. Tracer l'allure des courbes représentant les fonctions suivantes pour $x > 0$, en évitant si possible le calcul de la dérivée et le tableau de variation :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f_1(x) = x^2 & \text{b) } f_2(x) = \frac{1}{x} & \text{c) } f_3(x) = \frac{1}{x^2} & \text{d) } f_4(x) = e^x \\ \text{e) } f_5(x) = 2(1 - e^{-x}) & \text{f) } f_6(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} & & \end{array}$$

V - Dérivées, primitives

Q29. Déterminer les dérivées par rapport à x des fonctions suivantes (sans se soucier du domaine de validité) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f_1(x) = x^2 & \text{b) } f_2(x) = 3x^5 + 2x^2 + 6 & \text{c) } f_3(x) = \frac{1}{x} & \\ \text{d) } f_4(x) = \frac{3}{x^4} & \text{e) } f_5(x) = \frac{1}{3+2x} & \text{f) } f_6(x) = \frac{3}{(1-x)^2} & \\ \text{g) } f_7(x) = \frac{3x}{(1+x)^2} & \text{h) } f_8(x) = \sqrt{1+x+3x^2} & \text{i) } f_9(x) = \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} & \\ \text{j) } f_{10}(x) = \sin(x) & \text{k) } f_{11}(x) = \cos(x) & \text{l) } f_{12}(x) = 4 \times \cos(3x+1) & \\ \text{m) } f_{13}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} & \text{n) } f_{14}(x) = \sin(3x) \times \cos(2x) & \text{o) } f_{15}(x) = e^x & \\ \text{p) } f_{16}(x) = \ln(x) & \text{q) } f_{17}(x) = e^{-x} \times \sin(3x) & \text{r) } f_{18}(x) = \ln(2x^2+1) & \\ \text{s) } f_{19}(x) = e^{x \ln(x)} & \text{t) } f_{20}(x) = \ln(\ln(x)) & & \end{array}$$

Q30. Déterminer une primitive par rapport à x des fonctions suivantes (sans se soucier du domaine de validité) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f_1(x) = 4x^2 - x + 5 & \text{b) } f_2(x) = 2(x+2)^2 & \text{c) } f_3(x) = 3x \times (x^2-2)^2 & \\ \text{d) } f_4(x) = \frac{1}{x^2} & \text{e) } f_5(x) = \frac{4}{x^5} & \text{f) } f_6(x) = \sqrt{x} & \text{g) } f_7(x) = \frac{2}{(2+x)^2} \\ \text{h) } f_8(x) = \frac{4x}{(x^2+3)^2} & \text{i) } f_9(x) = x \times (x^2+1)^{3/2} & \text{j) } f_{10}(x) = \sin(x) & \\ \text{k) } f_{11}(x) = \cos(x) & \text{l) } f_{12}(x) = -\sin(2x) & \text{m) } f_{13}(x) = 4 \cos(3x-5) & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{n) } f_{14}(x) = -\sin(x) \times \cos(x) & \text{o) } f_{15}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} & \text{p) } f_{16}(x) = e^x \\ \text{q) } f_{17}(x) = 3e^{-2x} & \text{r) } f_{18}(x) = e^x \times \sin(e^x) & \text{s) } f_{19}(x) = \cos^2(x) \\ \text{t) } f_{20}(x) = 3x^2 \times \sqrt{2x^3+4} & & \end{array}$$

VI - Équations et inéquations

Q31. Résoudre dans les équations ou inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x = 4x - 3 & \text{b) } x^2 - 10 = 0 & \text{c) } x^2 + 4x + 1 = 0 \\ \text{d) } (x+2) \times (2x+5) = x^2 - 4 & \text{e) } 7x^2 = x & \end{array}$$

Q32. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{x} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} & \text{b) } \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = 1 & \text{c) } \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2} \end{array}$$

Q33. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 & \text{b) } x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \end{array}$$

Q34. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{3}{x-2} \leq 4 & \text{b) } \frac{x+2}{3-x} \leq 1 & \text{c) } x^2 + 2 > 5x - 4 & \text{d) } x^2 - 5x + 1 < 0 \\ \text{e) } (x^2 - 2x + 3) \times (x^2 - 6x + 8) \geq 0 & \text{f) } \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-2} \geq \frac{3}{10} & & \\ \text{g) } \frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3} & & & \end{array}$$

Q35. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{x+2}} < 1$.

Q36. Montrer que, pour tout $x \in [2, 4]$, $\frac{5}{18} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x-2} \leq \frac{17}{4}$.

Q37. Donner la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$, a, b étant des constantes et $y(0) = 0$.

VII - Complexes

Q38. (ME) Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a = i \times (1 + i) & \text{b) } b = (1 + i) \times (1 - i) & \text{c) } c = (5 + 2i)^2 \\ \text{d) } d = \frac{2}{1 + i} & \text{e) } e = \frac{1 - 3i}{2 + 4i} & \text{f) } f = \frac{1}{1 + i} - \frac{1}{1 - i} \end{array}$$

Q39. (ME) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants et placer les images sur le cercle trigonométrique :

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } 1 & \text{b) } i & \text{c) } -i & \text{d) } -1 & \text{e) } \frac{1 + i}{\sqrt{2}} & \text{f) } \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i & \text{g) } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}$$

Q40. (ME) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes définis par :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (1 - i) \times (1 + i) & \text{b) } \frac{1 - i}{1 + i} & \text{c) } (5 + 2i)^2 \end{array}$$

Q41. (ME) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } 4e^{\frac{i\pi}{2}} & \text{b) } e^{i\pi} & \text{c) } 2e^{-\frac{i\pi}{4}} & \text{d) } \frac{1}{1 + 2i} & \text{e) } \frac{1 - i}{1 + 2i} \end{array}$$

VIII - Applications aux sciences physiques

Q42. Optique : exprimer la distance algébrique $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$ et f' sachant que $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$.

Q43. (ME) Transformer en produit l'expression $\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)$.

Q44. Sachant que $x(t) = e^{-t/\tau} X_m \cos(\omega t)$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$, simplifier l'expression suivante : $\delta = \ln \left(\frac{x(t+T)}{x(t)} \right)$.

Q45. E étant le potentiel d'oxydoréduction (exprimé en V) . À partir de l'expression simplifiée $E = 1,23 + \frac{0,06}{4} \log[\text{H}_{(aq)}^+]^4$, exprimer E en fonction de pH.

Q46. Calculer "de tête" E sachant que $E = -0,44 + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{10^{-2}}{1} \right)$.

Q47. Quelles sont les dérivées par rapport au temps t des expressions suivantes (d) : on note $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ la vitesse et $x(t)$ la position) ?

$$\begin{array}{ll} \text{a) tension } u(t) = U_m \cos(\omega t) & \text{b) intensité } i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi) \\ \text{c) énergie potentielle } \mathcal{E}_P = \frac{1}{2} kx^2(t) & \text{d) énergie cinétique } \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} mv^2(t). \end{array}$$

Q48. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta & \text{b) } \int_0^{t_1} E e^{-t/\tau} dt \end{array}$$

Q49. Déterminer la condition sur ω_0 et $Q > 0$ pour que l'équation suivante admette 2 solutions réelles puis exprimer ces solutions r_1 et r_2 : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$.

Q50. Donner la solution de l'équation différentielle suivante correspondant à la charge d'un condensateur initialement déchargé ($u(t=0) = 0$ V), E étant une constante : $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u + \frac{E}{RC}$.

Q51. Déterminer le module et l'argument des impédances complexes suivantes, sachant qu'en physique on note $j^2 = -1$:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \underline{Z}_R = R & \text{b) } \underline{Z}_L = jL\omega & \text{c) } \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \end{array}$$

Q52. Déterminer le module de l'impédance complexe $\underline{Z} = R + jL\omega$.

Q53. Exprimer F_x et F_y pour la force $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ en fonction de $\|\vec{F}\|$ et l'angle θ .

